

# Matemaatikast meid ümbritsevates tehnoloogiates

*Andi Kivinukk*

([www.tlu.ee/~andik](http://www.tlu.ee/~andik) -> matem\_ennustav)

Tallinna Ülikooli matemaatika osakond

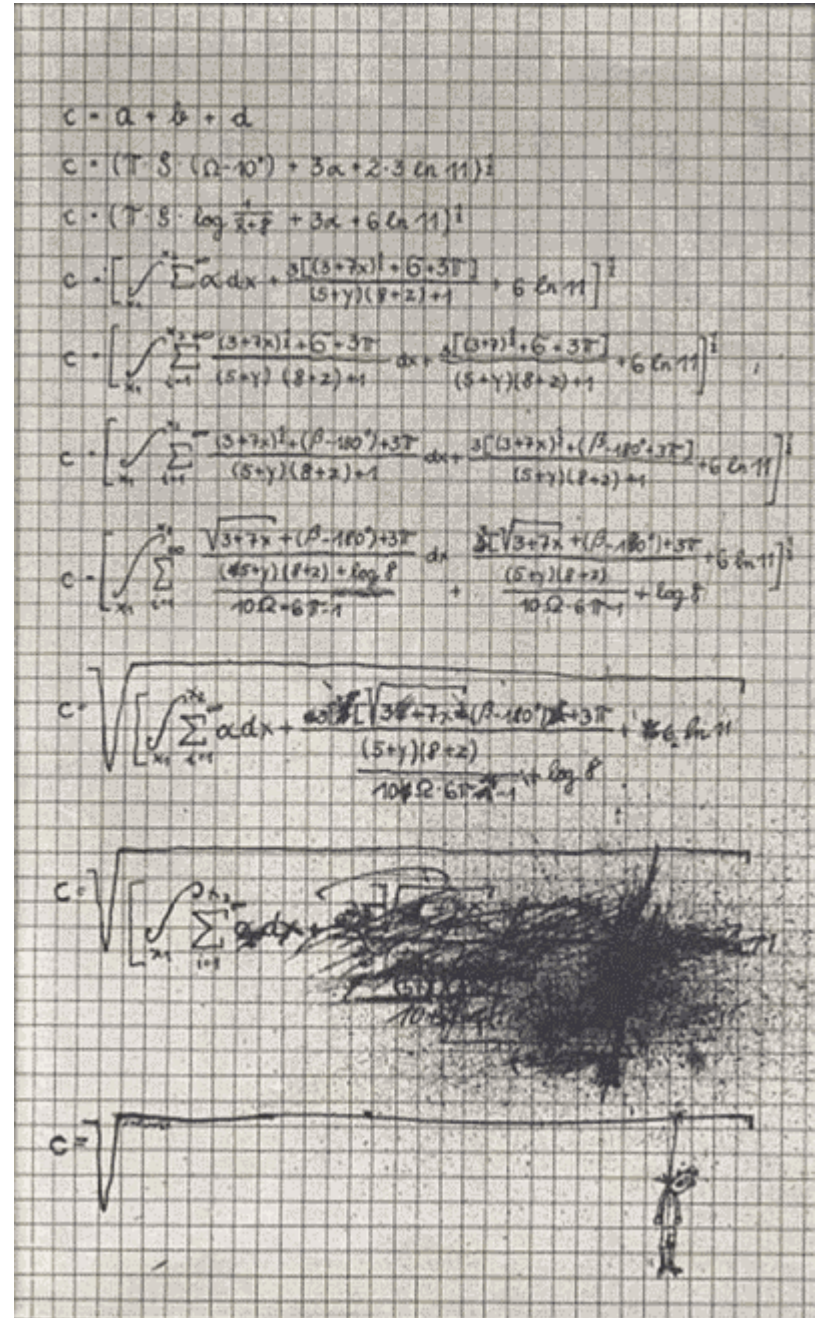
**Ettekanne Tallinna Ülikooli DTI6001.DT BA-  
üliõpilastele**

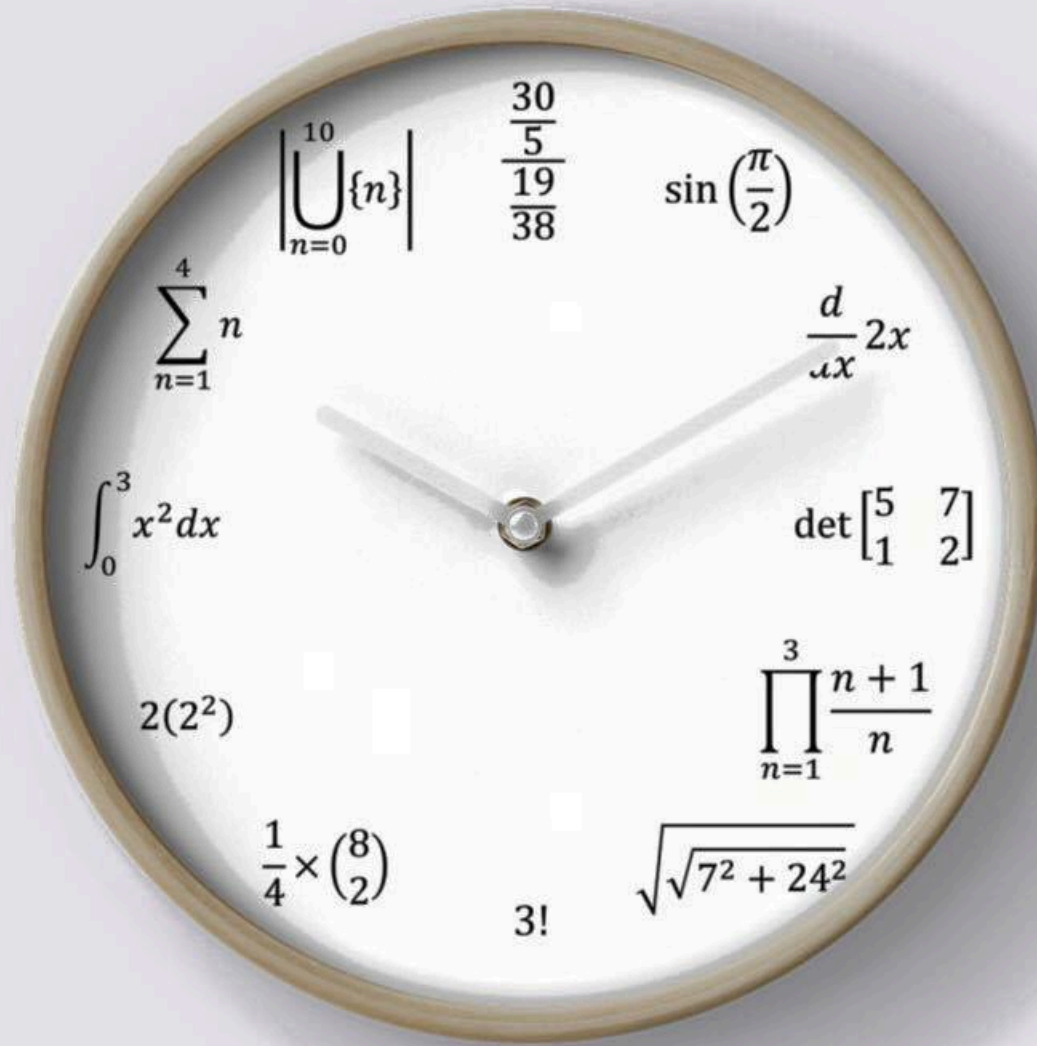
Narva mnt 29, A543, 29. september 2017

# Teemad

- Miks on matemaatika tähtis ? Mida saaks rääkida koolilastele või „inimestele trammis“ ?
- Matemaatika tänapäeva ühiskonnas
- Matemaatikast (tehnoloogiates) meie ümber
- Matemaatika aitab ennustada
- Vihjeid allikatele

- Mis on matemaatika ?
- Kas halvad hinded ja stress ?





$$\left| \bigcup_{n=0}^{10} \{n\} \right|$$

$$\frac{30}{\frac{5}{19} \frac{38}}{}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^4 n$$

$$\frac{d}{dx} 2x$$

$$\int_0^3 x^2 dx$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2(2^2)$$

$$\prod_{n=1}^3 \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{4} \times \binom{8}{2}$$

$$3!$$

$$\sqrt{\sqrt{7^2 + 24^2}}$$

# Mis on matemaatika ?

„Matemaatika on üks keel,“ ütles  
Josiah Willard Gibbs (1839-1903, USA  
füüsik, mehaanik, matemaatik;  
termodünaamika ja statistilise mehaanika  
alusepanija).

Ei ole ühtset definitsiooni.  
Kas on teadus või kunst ?



# Matemaatika olemus

- Kui matem-a oleks ülesannete lahendamine, siis kõik muutuks aina keerulisemaks
- Õnneks suure hulga faktide kogunemisel toimub **struktuuride** (mustrite) **loomine** (lahendati ruut-, kuup- jne edasi võrrandeid, kuni leiti üldine teooria)
- Matemaatika **terviklikkus** (algebra, geomeetria, matemaatiline analüüs jne – kõik omavahel läbi põimunud)
- **Ilu** printsiip (ilus säilib :  $a^2 + b^2 = c^2$  )
- **Matemaatiline modelleerimine** on tähtis (ja kasulik)
- Konkreetne matemaatik ei mõtle kasutoomisele, kuid tervikuna on **matemaatika suure kasuteguriga** (vaja ainult pliiatsit/paberit/arvutit)

See on ilus !

$e^{i\pi} = -1$ , kui  $e = 2.718 \dots$  ja  $i = \sqrt{-1}$



# Matemaatika ja ühiskond

Matemaatika **mõju** ühiskonnale (ja vastupidi) toimub selle rakenduste kaudu, mis tänapäeval baseeruvad **oluliselt arvutitel** (Allan Turing, 1912 – 1954; John von Neumann, 1903 - 1957 ).

**Nobeli** majanduspreemiat

(rääkimata füüsikast/keemiast, ka meditsiinist)

saab valdavalt ainult **matemaatika** rakendustega seotud tööde eest.



# 100 Scientific Discoveries that changed the World.

National Geographic, 2012 (eesti k 2013)

- WWW(World Wide Web),1990 = brauserid ja lk-d, eksisteerib tänu Internetile
- Personaalarvuti, 1977
- Internet, 1968 (ARPANET 1962 USA armees)
- Informatsiooniteooria, 1948, Claude Shannon (1916 - 2001)
- Boole'i arvutus, 1854, George Boole (1815 - 1864)
- Arvusüsteemid (kahendarvud, 1697, G.W.Leibniz (1646 - 1716)) , nt  $23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$  , aga

$$23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111$$

# Digipildindus

(kõik on kasutanud digikaameraid või saatnud JPG formaadis pilte):

iga pilt koosneb kahe muutuja funktsiooni väärtustest, milledega tuleb teha „kavalaid” teisendusi, et need väärtused pakkida (*lossy compression*) internetti ja siis meie kodus jälle pildiks lahti pakkida.

NB! Maatriksarvutus on siin tähtis.

Pilt ca 83 tuh baiti (1 bait on digitaalse info ühik, nt  
(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1))



Pilt ca 1500 baiti



# MP3 (ja uuemad versioonid) mängijad

Digitaalne meedia vahend (info salvestatud kadudega (*lossy compression*) digitaalselt).

MP3-süsteemi matemaatiline väljatöötamine algas ca 30 a. tagasi, baseerub täiesti uut tüüpi funktsioonidel, siinuste-koosinuste „sugulased”, ja mis võimaldavad hääle digitaalset teisendamist (*audio coding*) 12-15 korda kiiremini võrreldes varasemate meetoditega.



**Sony Walkman S-seeria mängija**

## MP3 mängijad (järg)

- Modifitseeritud diskreetne koosinusteisendus (MDCT)

$$X_k = \sum_{n=0}^{2N-1} x_n \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( n + \frac{N+1}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]$$

kodeerib infot (näiteks hääle sagedust) kujul

$$(x_0, \dots, x_{2N-1}) \rightarrow (X_0, \dots, X_{N-1})$$

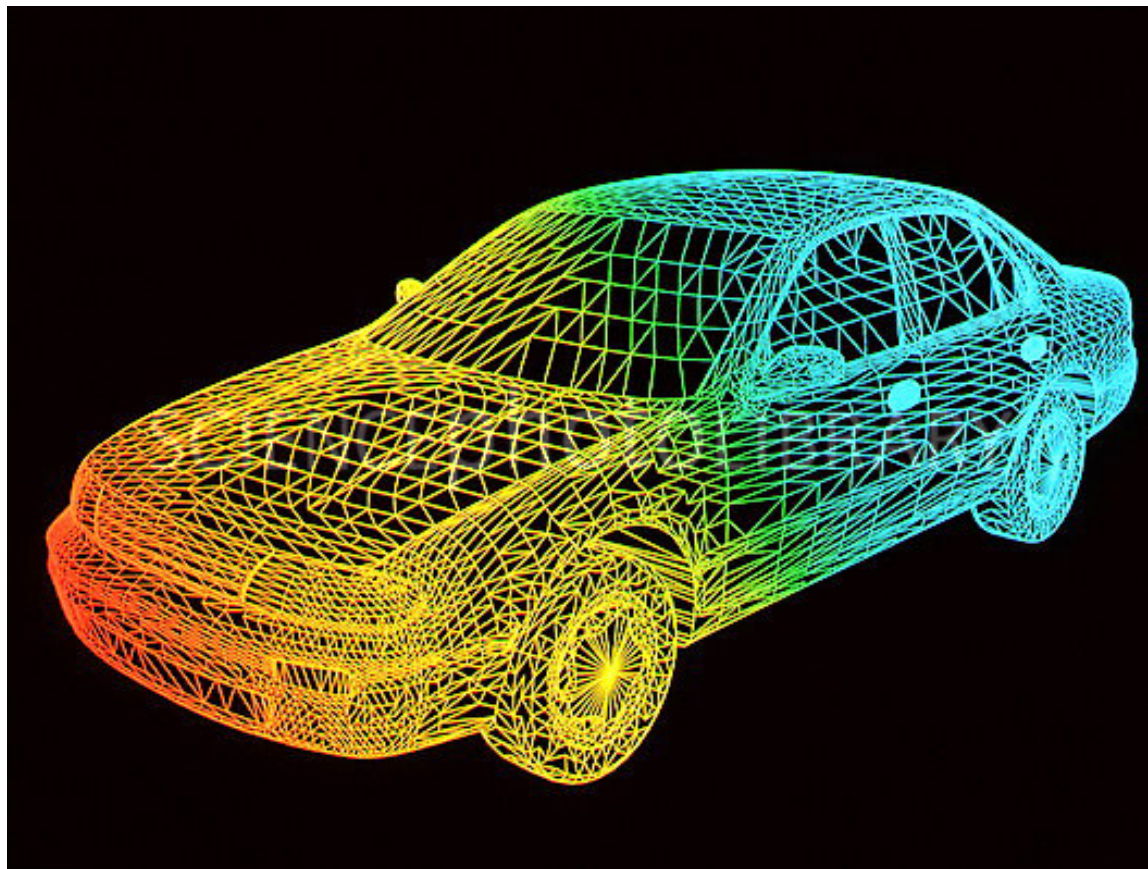
## **CAD** (*Computer Aided Design*) (ca 1950)

autotööstuses kirjeldab auto kuju ja see esitatakse kohe ka arvutiekraanil matemaatiliste funktsioonidega - need on **ruut- ja kuuppolünoomide** „kokkuliimitud sugulased” .

Eeldab nn mitmeharuliste funktsioonidega ( $F(x) = f(x)$ , kui  $a < x < b$  ja  $F(x) = g(x)$ , kui  $b < x < c$ ) tutvumist. Lihtsaim näide on murdjoon.

Vektorgraafika (punkt, sirge, joon, hulknurk) !





**Auto kere kujutis arvutiekraanil traatvõrena**

## GPS (*Global Positioning System*) 1978

mis kasutab asjaolu, et kui meie kaugused nelja satelliidini on teada, siis saame üheselt määrata oma asukoha kolm koordinaati.

Olemuselt trigonomeetria, tegelikult mittetriviaalne ülesanne, sest satelliidid liiguvad.

Kui rohkem satelliite nähtaval (GPS-s tiirleb neid kokku 24), siis kasutatakse vähimruutude meetodit.



**GPS-i satelliit**

# Arvutitomograafia

Kui kehast lasta läbi röntgenikiir, siis olenevalt keha omadustest see neeldub, seda mõõdetakse ja tulemused liidetakse, mis viib teatud (*Radoni*) integraalideni. Tehnika eest on saadud Nobeli meditsiinipreemia, A. M. Cormack 1979

NB! Integraali tutvustamine pindala ja summade abil on õpetlikum, kui formaalne definitsioon



**Komputertomograaf**

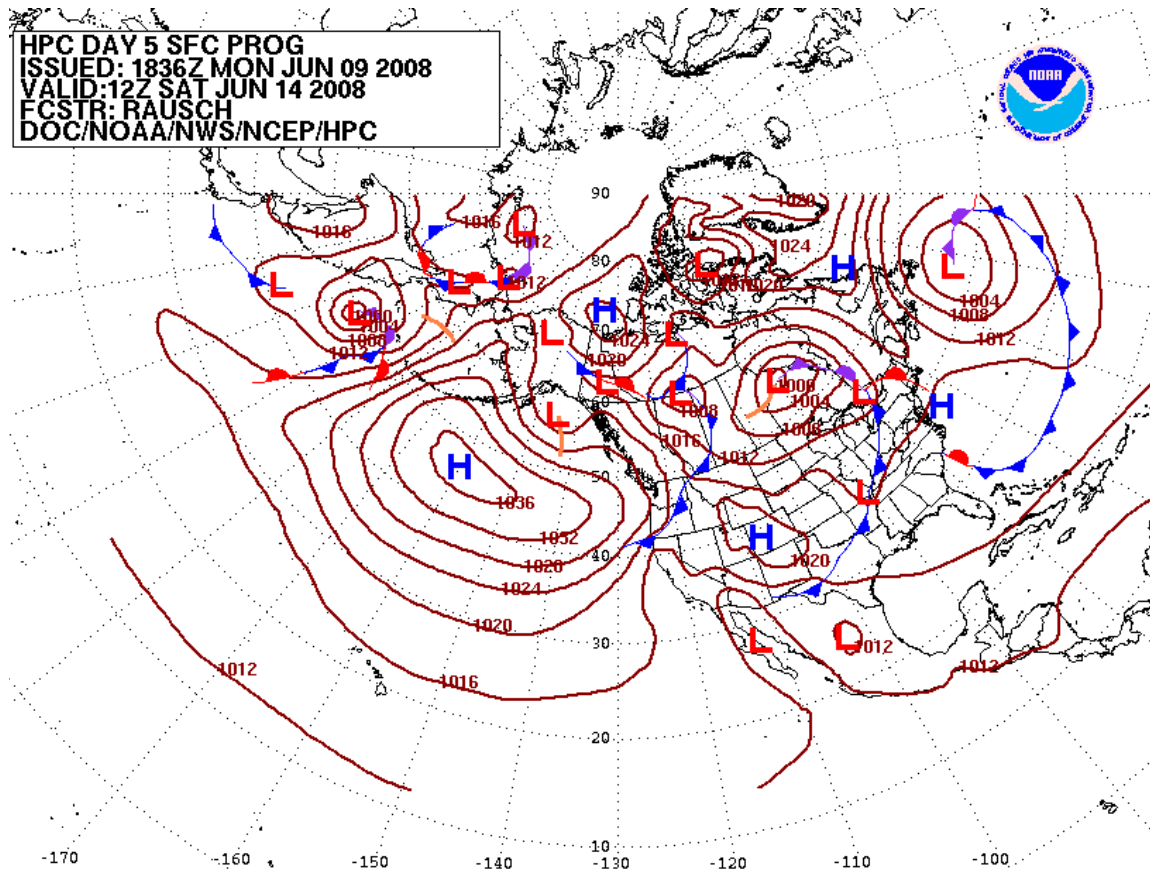
# Ilmaennustamine (vt nt ETV-s ilmakaarti, kus pilved ja isobaarid liiguvad)

Need ei ole aerofotod !

Kogutakse andmeid vaatlusjaamadest ja satelliitidelt.

Andmed korrastatakse arvutite tarbeks ja  
koostatakse 6 mittelineaarset  
diferentsiaalvõrrandit, kus 6 argumenti.

Kiired numbrilised algoritmid võimaldavad neid  
võrrandeid (õigeaegselt) lahendada.



## Periodi 9.-14. juuni 2008 isobaarid

Periodi 9.-14. juuni 2008 isobaaride (samarõhu-joonte) kaart.

Tinglik normaalarõhk 760 mm Hg = 1013 hPa, mm Hg on kasutusel seinabaromeetrites.

# Teadete salastamine (krüptograafia)

- Internetiajastul (al 1970) algas suuremahuline infovahetus, mida osaliselt (pangad, armeed, firmad) oli vaja salastada
- Uus sügavalt matemaatiline idee: avaliku võtmega kodeerimine (**RSA** – R. Rivest, A. Shamir, L. Adelman (MIT) ).
- Kodeerimine toimub suurte, juhuslikult genereeritud algarvude korrutamisel,  $p * q = N$ , kuid dekodeerimine  $N$  teguriteks lahutamisel.

Näide:  $56942507 = ? * ?$



## Triipkood (*barcode*),

- 1949 ühes Philadelphia toidupoes, 1960-d Ameerika Raudtee Assotsiatsioon
- Praegu laialdaselt kasutusel EAN-13 triipkood (European Article Number, nüüd International Article Number )

Eelmise slaidi vastus:  $56942507 = 7901 * 7207$

# EAN2 kood

(numbrite 0 – 9 neljateistkohalised koodid)

0 0001101 0100111

5 0110001 0111001

1 0011001 0110011

6 0101111 0000101

2 0010011 0011011

7 0111011 0010001

3 0111101 0100001

8 0110111 0001001

4 0100011 0011101

9 0001011 0010111

ISSN 0317-8471



EAN-2 koodis triipkood

# Matemaatika aitab ennustada

## Matemaatiline modelleerimine

*Lineaarse nõudlus- ja pakkumisfunktsiooniga turu dünaamika*

Ajamomentidel  $n = 0, 1, 2, \dots$  olgu turul kauba hind vastavalt  $p_n$  ja kaupa nõutakse kogus  $D_n$  ning pakutakse  $S_{n+1}$  (see tähendab, et pakkumine päeval  $n + 1$  oleneb eelmise päeva hinnast  $p_n$ )

Võrranditega:

$$D_n = a - b p_n; \quad S_{n+1} = c + d p_n$$

Turu tasakaal tähendab:  $S_{n+1} = D_{n+1} \quad c + d p_n = a - b p_{n+1}$

Saame:

$$p_{n+1} = A p_n + B \quad (*)$$

( $A = -d/b < 0$ ,  $d$  – tootmise kiirus (intensiivsus),  $b$  – tarbimise kiirus;  $B = (a - c)/b > 0$ )

Näide 1.  $p_{n+1} = -0.5 p_n + 2$

Arvutame:

olgu  $p_0 = 1.5$ ,

siis  $p_1 = 1.25$ ,  $p_2 = 1.375$ ,  $p_3 = 1.3125$ ,  $p_4 = 1.34375$ ,

$p_5 = 1.328125$ , ...

Hind tundub stabiliseeruvat, aga milliseks väärtuseks? Oletame, et piirväärtuseks on  $p^* = ?$

Saame  $p^* = -0.5p^* + 2$  ehk  $p^* = 2/1.5 = 1.333...$

$$\text{Näide 2. } p_{n+1} = -1.5 p_n + 2$$

Arvutame:

$$\text{olgu } p_0 = 1.5,$$

$$\text{siis } p_1 = -0.25, \quad p_2 = 2.375, \quad p_3 = -1.5625, \quad p_4 = 4.34375, \quad p_5 = -4.515625, \dots$$

Midagi enneolematut ? Mõned hinnad negatiivsed  
???

# Näide mittelineaarsest dünaamilisest süsteemist

Nõudmine:  $D_n = 3 - 2p_n$ ; Pakkumine:  $S_{n+1} = p_n^2 + 1$

Turu tasakaal :  $S_{n+1} = D_{n+1}$  ehk  $p_n^2 + 1 = 3 - 2p_{n+1}$ ,  
millest

$$p_{n+1} = 1 - p_n^2 / 2 \quad (**)$$

Seda analüütiliselt lahendada ei saa, aga arvutada saab (4 kohta peale koma).

Olgu  $p_0 = 1.0$ , siis  $p_1 = 0.5$ ,  $p_2 = 0.875$ ,  $p_3 = 0.6172$ ,  
 $p_4 = 0.8095$ ,  $p_5 = 0.6724$ ,  $p_6 = 0.7739$ ,  $p_7 = 0.7005$ ,  
 $p_8 = 0.7546$ ,  $p_9 = 0.7153...$

Vist stabiliseerub kuskile ? Geomeetriliselt “ämblikuvõrgu” meetod !

[http://en.wikipedia.org/wiki/Cobweb\\_plot](http://en.wikipedia.org/wiki/Cobweb_plot)

Vaatame !

Seal võrrand  $p_{n+1} = 3 (p_n - p_n^2)$  ja  $p_0 = 0.08$ ,  
 $p_1 = 0.22$ ,  $p_2 = 0.516$  jne.

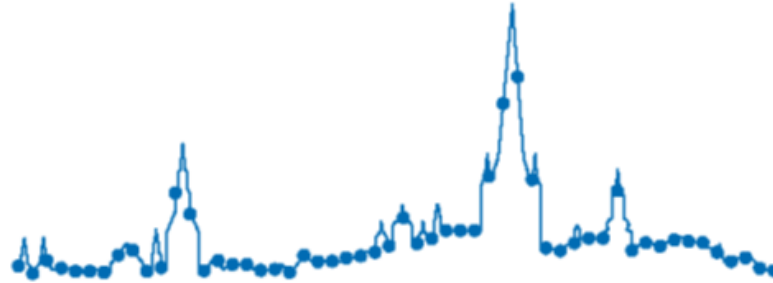
Teisel joonisel on

$p_{n+1} = r (p_n - p_n^2)$ , kus  $1 \leq r \leq 4$ .



# Viiteid allikatele

- Algvihtjed raamatutest (nt Applied Mathematics Entering the 21st Century : invited talks from the ICIAM 2003 Congress / Eds. J. M. Hill and R. Moore, SIAM 2004), artiklites, Signal Processing konverentsidelt
- <http://www.stanford.edu/~roypea>
- [khanacademy.org/](http://khanacademy.org/)
- [http:// en.wikipedia.org/wiki/Main\\_page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_page) -> **Technology** -> [Search] (MP3, barcode, ...)



# sampling theory and applications 2017

12th International Conference  
Tallinn, Estonia, July 3-7



IEEE  
*Signal Processing Society*



Loodan, et oli kasulik.

Tänan !